1 DE STELLING VAN PYTHAGORAS

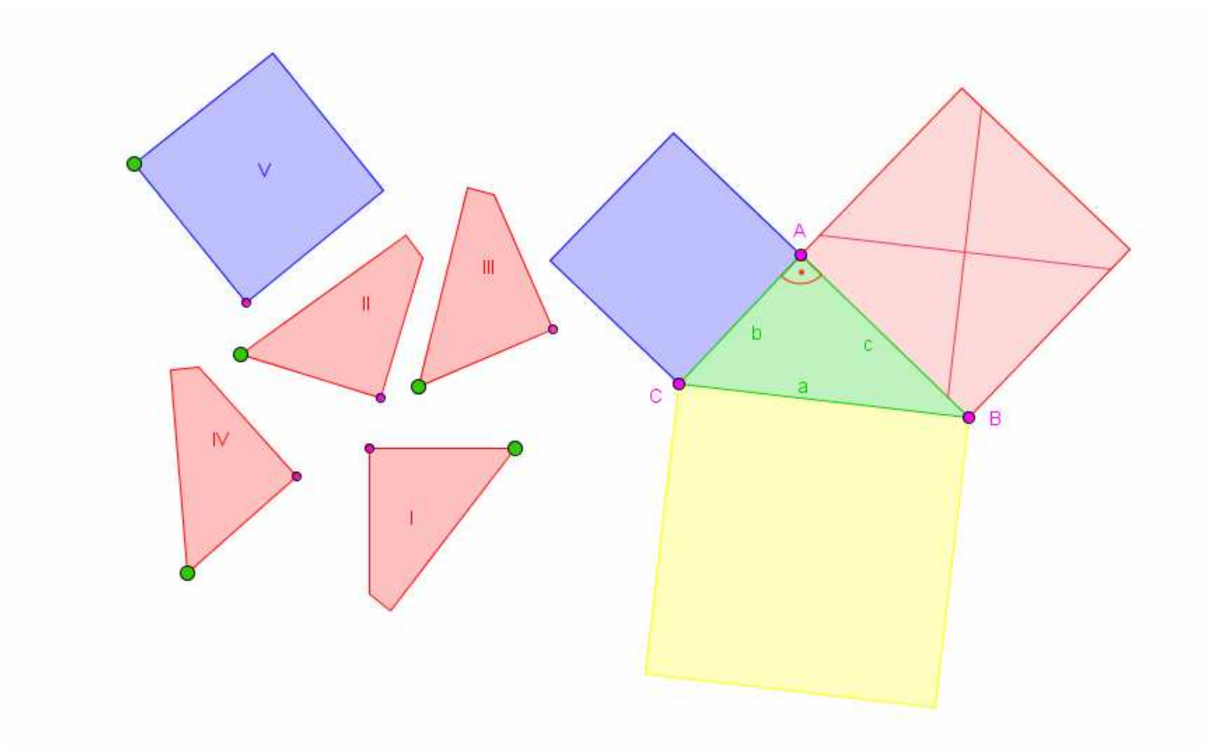
1.1 Verkennende opdrachten

1.1.1 Pythagoras puzzel (mozaïek van Henry Perigal 1801-1898)

- Open de link naar het bestand “1 Pythagoras_puzzel.htm”

Gegeven is een rechthoekige driehoek Δ ABC met als rechte hoek A.
Op de drie zijden van deze rechthoekige driehoek zijn drie vierkanten geconstrueerd.
De lengten van de zijden van deze driehoek noteren wij met kleine letters:
|AB| = c , |AC| = b en |BC| = a. Deze letters komen overeen met de naam van de hoek die tegenover deze zijde staat.

- Onderzoek het verband tussen de oppervlakten van de drie getekende vierkanten.
Probeer de 5 puzzelstukken I, II, III, IV, en V te verslepen zodanig dat het grote gele vierkant volledig gevuld is.
Jij kan de puzzelstukjes draaien met de (kleine) purperen hoekpunten en verschuiven met de groene (grote) hoekpunten.



- Wijzig ook de vorm van de rechthoekige driehoek door de hoekpunten A en C te verslepen.
- Noteer jouw bevindingen.

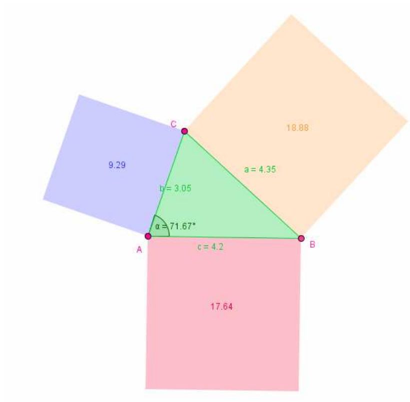
Bestand naar een idee van http://teachers.henrico.k12.va.us/math/GeoGebra_Site/pythagoras/pythaPuzzle_worksheet.ggb

1.1.2 Verband tussen de kwadraten van de zijden van een WILLEKEURIGE driehoek

🖰 Open het bestand “2 Verband tussen de zijden.htm”

Gegeven is een WILLEKEURIGE driehoek Δ ABC
Het kwadraat van de lengte van een zijde van de driehoek kan men meetkundig voorstellen als de oppervlakte van een vierkant waarvan de lengte van de zijden even groot is als de lengte van de overeenkomstige zijde van de driehoek.
Op de drie zijden van deze driehoek zijn drie vierkanten geconstrueerd.

🖰 Jij kan de lengten van de rechthoekszijden van de driehoek wijzigen door het verslepen van de hoekpunten A, B en C van de driehoek.



🖰 Versleep één van de hoekpunten van de driehoek.
Vervolledig de volgende tabel voor een aantal verschillende waarden van a, b en c.
Onderzoek verschillende situaties, al naar gelang de hoek A een scherpe of stompe hoek is.

a	b	c	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	hoek A = α Scherp ? Stomp ?	$a^2 \ldots b^2 + c^2$ < ? > ?

🖰 Noteer jouw vermoeden i.v.m. het verband tussen $a^2 \ldots b^2 + c^2$, indien de hoek scherp is…

🖰 Noteer jouw vermoeden i.v.m. het verband tussen $a^2 \ldots b^2 + c^2$, indien de hoek stomp is…

Wat denk jij dat het verband is indien de hoek A een rechte hoek is ?

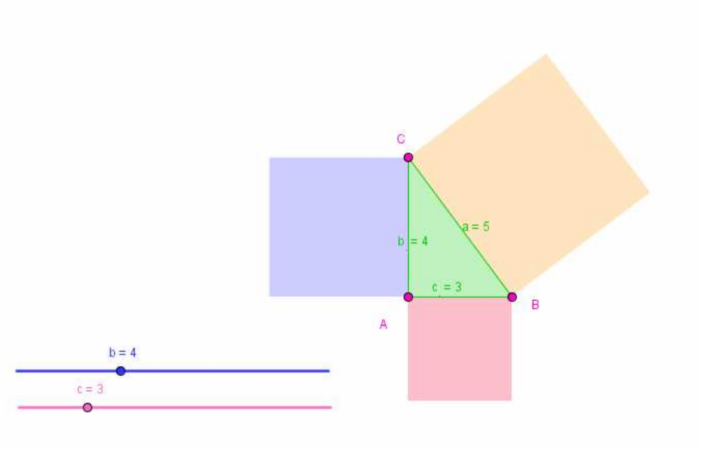
1.1.3 De stelling van Pythagoras

Open het bestand "3 De stelling van Pythagoras.htm"

Gegeven is een RECHTHOEKIGE Δ ABC met als rechte hoek A.
De zijde a = |BC| noemt men de schuine zijde en de twee overige zijden b en c de rechthoekszijden.

Het kwadraat van de lengte van een zijde van de driehoek kan men meetkundig voorstellen als de oppervlakte van een vierkant waarvan de lengte van de zijden even groot is als de lengte van de overeenkomstige zijde van de driehoek.
Op de drie zijden van deze driehoek zijn opnieuw drie vierkanten geconstrueerd.

Jij kan de lengten van de rechthoekszijden van de driehoek wijzigen door het verslepen van de schuifknoppen b en c.



Wijzig de lengten van de twee rechthoekszijden en meet de lengte van de schuine zijde.
Vervolledig de volgende tabel voor een aantal verschillende waarden van b en c.

b	c	Schuine zijde a	b^2	c^2	a^2	$b^2 + c^2$

Noteer jouw vermoeden i.v.m. het verband tussen a^2 en $b^2 + c^2$ indien de hoek A recht is.

Probeer de eigenschap die jij ontdekt hebt zo nauwkeurig mogelijk te formuleren.

De stelling van Pythagoras

1.2 Ook "familie" van Pythagoras?

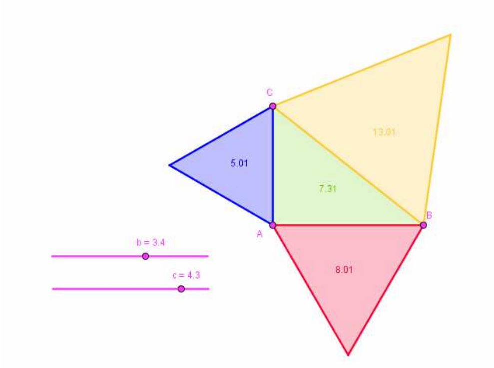
Wij onderzoeken nu of de gevonden eigenschap ook geldig is indien men in plaats van vierkanten op de zijden andere meetkundige figuren construeert.

1.2.1 Gelijkzijdige driehoeken

Open het bestand "4 Pythagoras en gelijkzijdige driehoeken.htm"

Gegeven is een rechthoekige driehoek Δ ABC met als rechte hoek A
Op de drie zijden van deze rechthoekige driehoek zijn drie gelijkzijdige dreihoeken geconstrueerd.

Jij kan de lengten van de rechthoekszijden van de driehoek wijzigen door het verslepen van de punten op de schuifknoppen b en c.



Vul de volgende tabel aan voor een aantal waarden van b en c

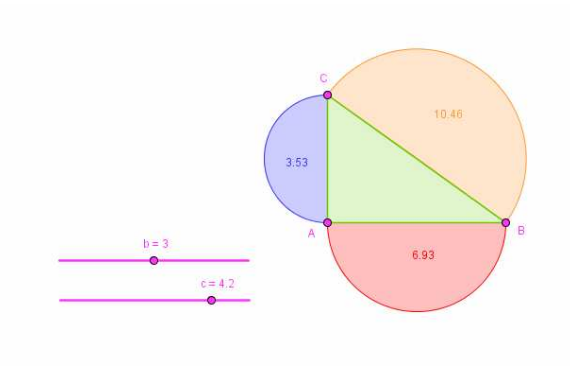
Lengte zijde b	Lengte zijde c	Oppervlakte blauwe driehoek	Oppervlakte rode driehoek	Oppervlakte grote gele driehoek

Wat kun jij besluiten ?

1.2.2 Halve cirkelschijven

Open het bestand "5 Pythagoras en halve cirkels.htm"

Gegeven is een rechthoekige driehoek Δ ABC met als rechte hoek A
Op de drie zijden van deze rechthoekige driehoek zijn halve cirkelbogen geconstrueerd.



- Jij kan de lengten van de rechthoekszijden van de driehoek wijzigen door het verslepen van de punten op de schuifknoppen b en c.
- Vul de volgende tabel aan voor een aantal waarden van b en c

Lengte zijde b	Lengte zijde c	Oppervlakte blauwe halfcirkel	Oppervlakte rode halfcirkel	Oppervlakte grote gele halfcirkel

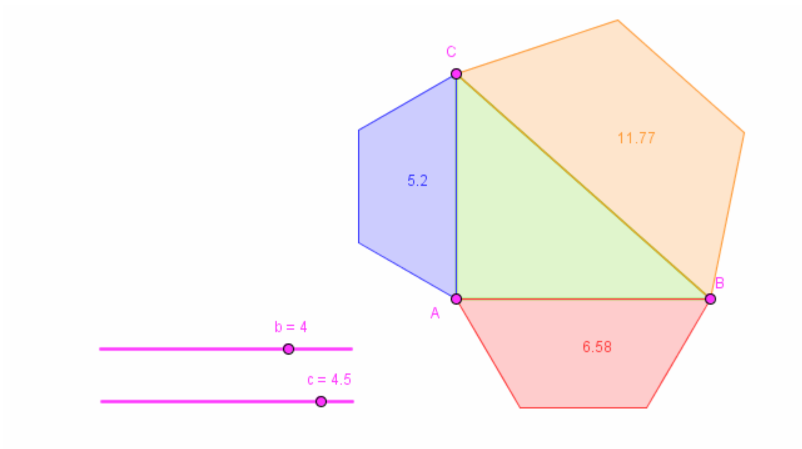
- Wat kun jij besluiten ?

1.2.3 Trapezia

- Open het bestand “6 Pythagoras en trapezia.htm”

Gegeven is een rechthoekige driehoek Δ ABC met als rechte hoek A
Op de drie zijden van deze rechthoekige driehoek is er telkens een trapezium geconstrueerd.

- Jij kan de lengten van de rechthoekszijden van de driehoek wijzigen door het verslepen van de punten op de schuifknoppen b en c.



- Vul de volgende tabel aan voor een aantal waarden van b en c

Lengte zijde b	Lengte zijde c	Oppervlakte blauw trapezium	Oppervlakte rood trapeziuml	Oppervlakte groot geel trapezium

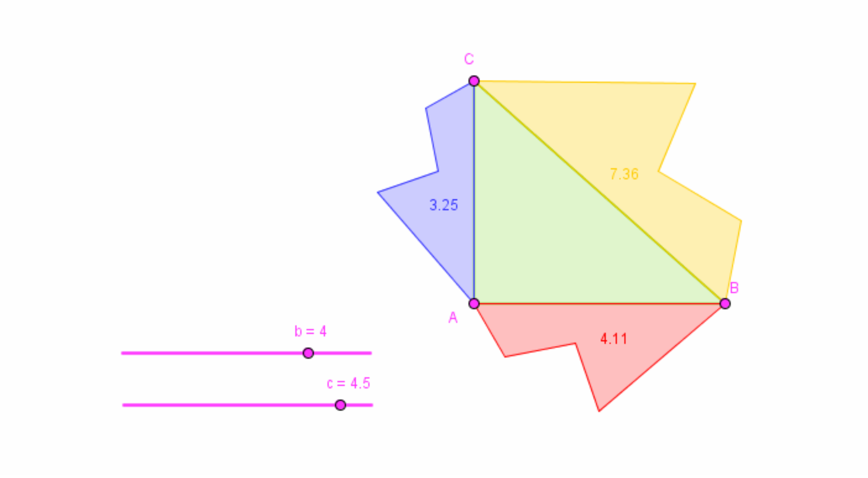
- Wat kun jij besluiten ?

1.2.4 Veralgemening van de stelling van Pythagoras

Open het bestand “7 Pythagoras en veelhoeken.htm”

Gegeven is een rechthoekige driehoek Δ ABC met als rechte hoek A

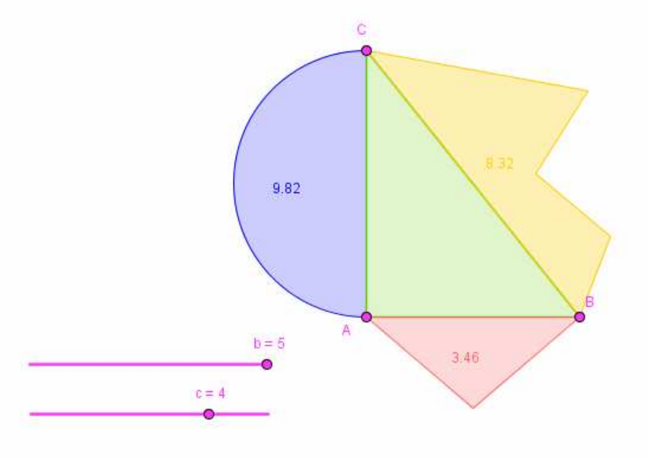
Jij kan de lengten van de rechthoekszijden van de driehoek wijzigen door het verslepen van de punten op de schuifknoppen b en c.



Is het gevonden verband tussen de drie oppervlakten ook geldig in deze situatie ?

Geldt de eigenschap van de stelling van Pythagoras in alle omstandigheden ?

Open het bestand “8 Pythagoras en niet gelijkvormige figuren.htm”



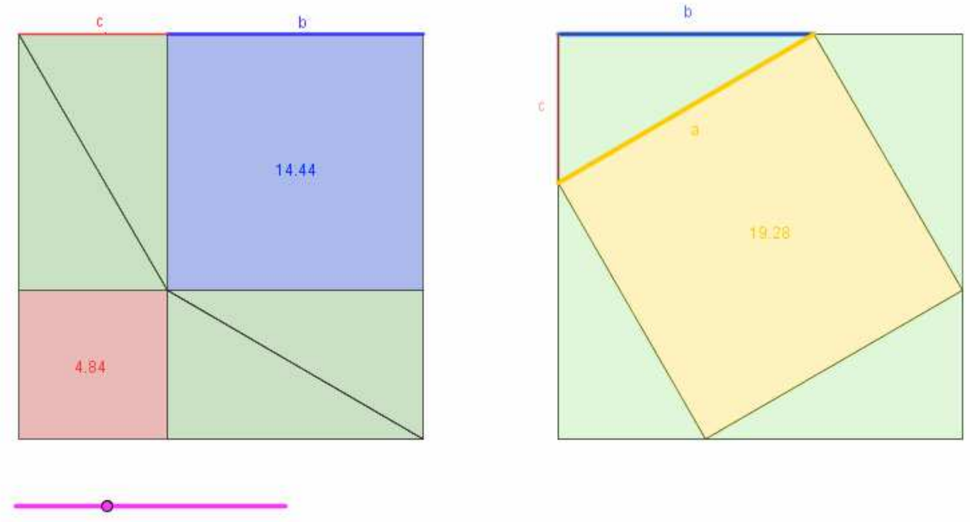
Vul verder aan:

In dit geval geldt de gevonden eigenschap tussen de oppervlakten van de drie figuren …. omdat deze figuren ……………………… zijn.

1.3 Bewijzen voor de stelling van Pythagoras

1.3.1 Eén van de allereerste bewijzen

Open het bestand "Pythagoras_bewijs1.htm"



Versleep de schuifknop en onderzoek een aantal situaties.

Beide vierkanten zijn even groot en hebben als lengte van de zijden b + c

Bereken algemeen de oppervlakte van de twee vierkanten en de 4 driehoeken in de linkse figuur.

…………………………………………. (1)

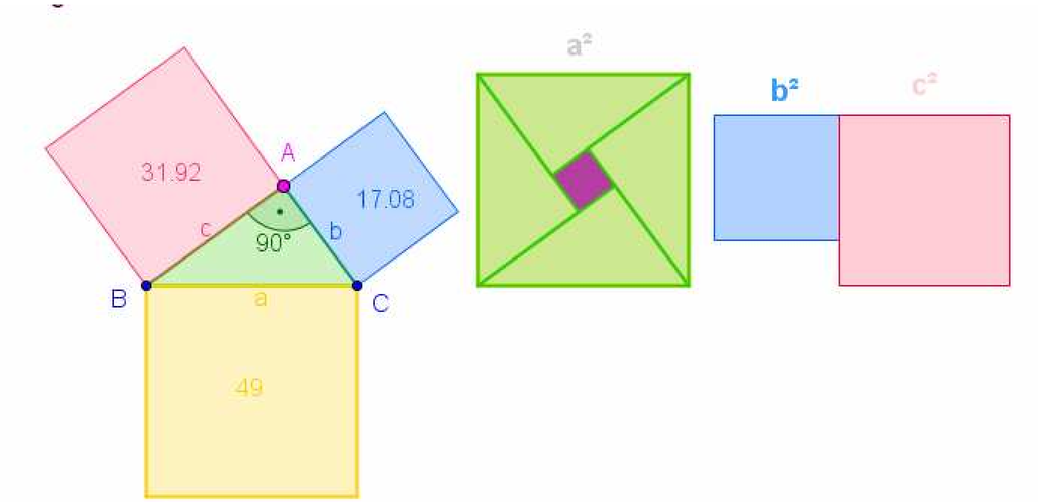
Bereken ook de oppervlakte van het grote (gele) vierkant rechts en de 4 driehoeken.

…………………………………………. (2)

Stel deze 2 resultaten aan elkaar gelijk. Wat kun jij hieruit besluiten?

1.3.2 Bewijs van Bhaskara (1150)

- Open het bestand "Bewijs van Bhaskara.htm"
- Beweeg de schuifknop voor een dynamische illustratie van dit bewijs.



Het grote vierkant kan men verdelen in 4 congruente driehoeken en één vierkant in het midden.

Noteer de oppervlakte van het grote vierkant met zijde a

………………………………………… (1)

Bereken de oppervlakte van de 4 (groene) driehoeken met basis = ….. en hoogte = . …

………………………………………… (2)

De lengte van de zijde van het kleine vierkant in het midden is …..

De oppervlakte van dit kleine vierkant is:

………………………………………… (3)

Na gelijkstelling van (1) = (2) + (3) bekomt men tenslotte:

………………………………………… (4)

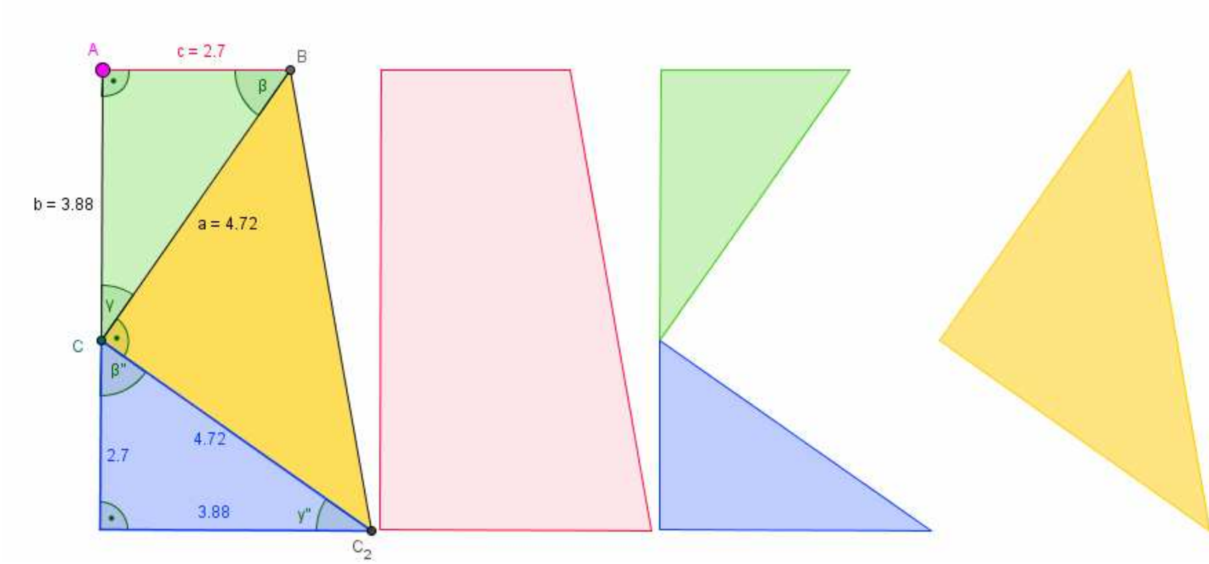
- Versleep ook het hoekpunt A en onderzoek een aantal verschillende situaties.

1.3.3 Bewijs van Garfield (1831-1881)

Open het bestand “Bewijs van Garfield.htm”

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC.
De zijde b wordt verlengd met c en een congruente driehoek geconstrueerd.
Door het verbinden van B met C_2 ontstaat een trapezium.

Versleep de schuifknop voor een interactieve versie van dit bewijs.



Bepaal de oppervlakte van dit trapezium:

…………………………………………. (1)

Bepaal de oppervlakte van de twee driehoeken:

…………………………………………. (2)

Bepaal de oppervlakte van het (gele) vierkant=

…………………………………………. (3)

Uit de gelijkheid (1) = (2) + (3) volgt:

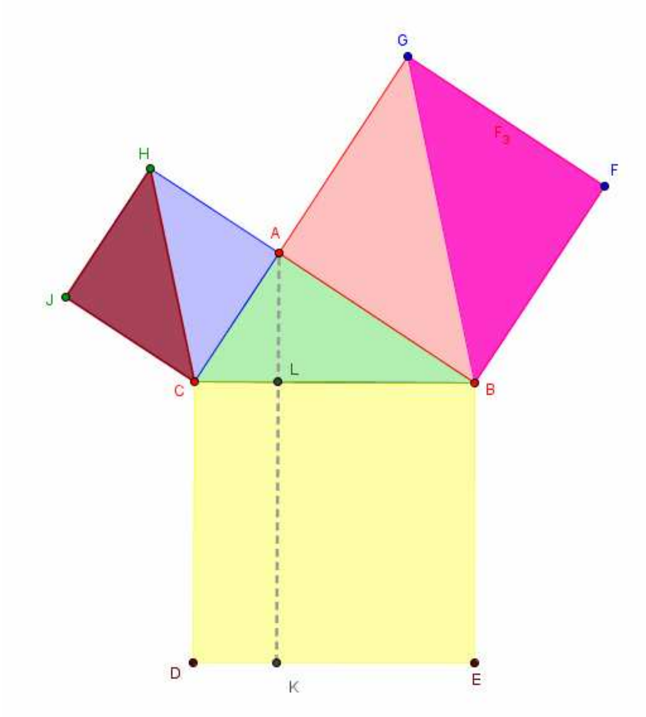
………………………………………….

Versleep ook het hoekpunt A en onderzoek een aantal verschillende situaties.

1.3.4 Bewijs van Euclides (300 v Chr.)

Dit is ongetwijfeld één van de moeilijkere bewijzen voor de stelling van Pythagoras.

Open het bestand "Bewijs van Euclides.htm"



Versleep de schuifknop voor een interactieve illustratie van dit bewijs.

Versleep ook de hoekpunten A,B en C en onderzoek verschillende situaties.

Probeer dit bewijs nu zelf weer te geven: